

ЛЕКЦИЯ 2

Тема: Основы теории автоматического управления

Вопросы:

1. Математические модели объектов управления.
2. Общие свойства объектов регулирования.
3. Основные типы объектов автоматического регулирования.
4. Дифференциальные уравнения типовых объектов и методы операционного исчисления для их анализа и синтеза.
5. Динамические характеристики объектов управления: передаточная функция, переходная характеристика

2.1. Математические модели объектов управления

Под математической моделью (ММ) понимается оператор, характеризующий поведение реальной системы и отражающий все ее информационные свойства. В соответствии с этим определением выделяются наиболее существенные свойства и признаки системы, они представляются в такой форме, которая необходима для последующего теоретического и экспериментального исследования.

На первом этапе расчета и проектирования систем автоматического управления (САУ) ограничиваются *качественным описанием систем* и в связи с этим рассматривают их *функциональные схемы*. Такое описание называют *содержательным* или *неформальным*. Неформальным описанием САУ называется вся имеющаяся совокупность сведений о ней, достаточная для построения фактического алгоритма ее работы. Неформальное описание системы содержит информацию, достаточную для построения ее функциональной схемы. Последняя же служит основой для разработки *формального* (математического) *описания системы*.

Недостаток содержательного или неформального описания систем в том, что такой подход не оперирует количественными характеристиками и, таким образом, наука, в основе которой лежит неформальное описание, не является точной наукой. Для решения же задач исследования и проектирования систем необходимо оперировать количественными характеристиками, определяющими качество ее работы. А именно, *математическими моделями*. В связи с этим *центральный понятием теории систем управления является математическая модель или оператор системы*.

Наиболее часто встречаются объекты регулирования следующих видов:

1. Объекты с самовыравниванием:

$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1}$ - объект со свойствами апериодического звена первого порядка,

$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}$ - объект со свойствами колебательного звена,

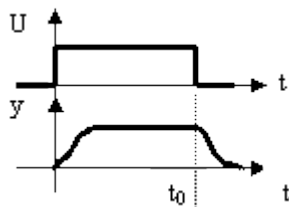
$W_0(p) = \frac{k_0}{(T_{01} p + 1)(T_{02} p + 1)}$ - объект со свойствами апериодического звена второго порядка,

$W_0(p)$ k_0 где - передаточная функция объекта,

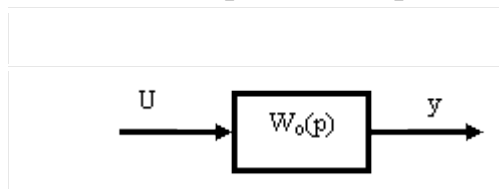
- передаточный коэффициент,

T_0, T_{01}, T_{02} - постоянные времени,

ξ - коэффициент затухания.



Характерное свойство этих объектов – выходная координата принимает установившееся значение, если входное воздействие становится постоянным, причём после прекращения входного воздействия выходная координата стремится к нулю.

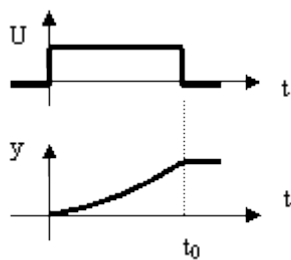


Управление такими объектами возможно по пропорциональному (П-регулятор) или пропорционально-интегральному (ПИ-регулятор) законам регулирования. В последнем случае статическая ошибка равна нулю при постоянном входном воздействии. Если объект второго порядка, то применяют пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-регулятор) закон регулирования.

2. Объекты без самовыравнивания

Здесь после прекращения действия входного воздействия выходная координата не восстанавливает своего первоначального значения.

$W_0(p) = \frac{k_0}{p(T_0 p + 1)}$ - объект обладает свойствами апериодического и интегрирующего звеньев (реальное интегрирующее звено).



Применять интегральный закон регулирования нельзя, так как это приводит к повышению порядка астатизма системы (второй порядок), ибо сам объект является интегрирующим звеном.

Системы с астатизмом второго порядка построить можно, но требуется сложное корректирующее звено, обладающее дифференцирующими свойствами. Обычно применяют регуляторы типа П или ПД.

3. Объекты с запаздыванием

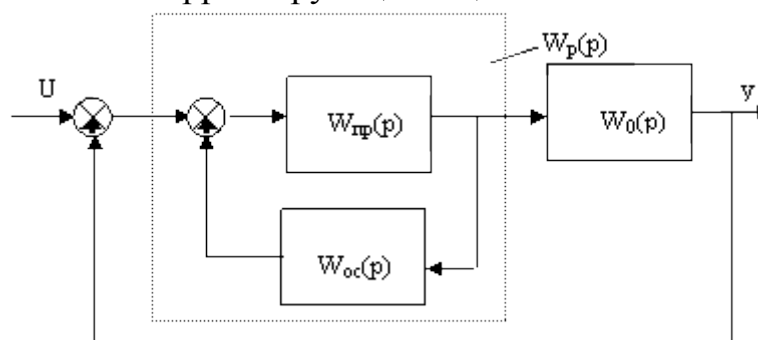
Чаше других встречаются объекты с запаздыванием, описываемые передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{k_0 e^{-pT_0}}{T_0 p + 1}.$$

Регуляторы для этих объектов обязательно содержат дифференцирующую часть в законе регулирования, чтобы компенсировать запаздывание, вносимое в САУ объектом.

Расчет систем управления с типовыми регуляторами проводят по методам, излагаемым ниже.

Часто системы с регуляторами рассматриваются как системы с встречно-параллельными корректирующими цепями.



В структурной схеме:

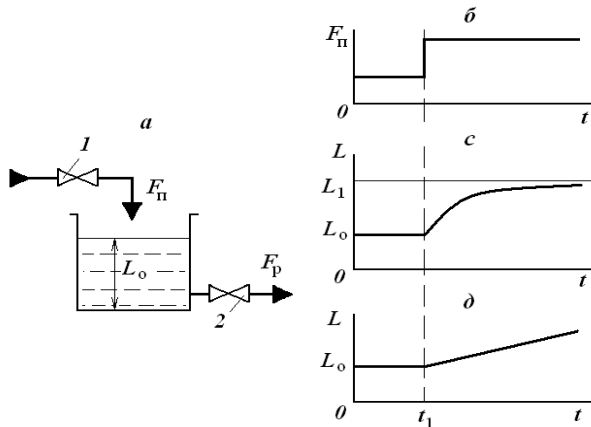
$W_{пр}(p)$ - передаточная функция прямой цепи регулятора,

$W_{oc}(p)$ - передаточная функция местной отрицательной обратной связи.

2.2. Общие свойства объектов регулирования

На процесс регулирования физических параметров оказывают влияние как свойства регулирующей части системы (регулятора), так и свойства объекта регулирования.

Основные свойства объектов регулирования



Как правило, перед созданием системы тщательно изучают объект регулирования. Определяют статические и динамические характеристики объекта и на их основе формулируют требования к регулятору системы.

Основными свойствами объекта регулирования являются:

- емкость объекта (коэффициент емкости объекта);
- самовыравнивание;
- время разгона и скорость разгона;
- запаздывание.

Под **емкостью регулируемого объекта** подразумевается его способность накапливать энергию или вещество. Если объект регулирования обладает малой емкостью, то регулируемый параметр изменяется быстро и наоборот. Чем больше емкость объекта, тем проще решается задача регулирования. Например, при регулировании относительной влажности в помещениях последняя изменяется значительно быстрее, чем температура. Это означает, что помещения обладают существенно меньшей емкостью при регулировании влажности, чем температуры. Отсюда следует, что поддерживать относительную влажность в помещениях более сложно, чем температуру.

Емкость объекта регулирования чаще всего определяют экспериментальным путем, в связи, с чем имеющиеся аналитические зависимости можно применять в ограниченных случаях.

Самовыравниванием называется свойство регулируемого объекта после нарушения равновесия в объекте под действием возмущения вернуться к этому состоянию самостоятельно, без участия человека или регулятора.

Предположим, что уровень жидкости L_0 в резервуаре (рис. 3.6а) постоянный, то есть имеет место баланс $F_{\text{п}} = F_{\text{р}}$.

Если открыть клапан 1, то приток $F_{\text{п}}$ увеличится (рис. 3.6б). Уровень жидкости L возрастает, что приводит к увеличению гидростатического напора жидкости в резервуаре и, следовательно, расхода $F_{\text{р}}$ жидкости. При определенном новом уровне L_1 опять будет выполняться равенство $F_{\text{п}} = F_{\text{р}}$. Таким образом, рассмотренный объект обладает

самовыравниванием (рис. 3.6с). При откачивании жидкости из резервуара насосом данный объект теряет свойство самовыравнивания (рис. 3.6д).

Рис. 3.6. Переходный процесс в объектах с самовыравниванием (с) и без самовыравнивания (д)

Количественная оценка объектов регулирования с точки зрения самовыравнивания характеризуется коэффициентом (степенью) самовыравнивания ρ . На практике степень самовыравнивания объектов регулирования определяют с помощью кривых самовыравнивания (разгона) объектов, полученных экспериментальным путем.

Для примера на рис. 3.7 представлена кривая разгона теплового объекта (например, ПК + помещение), по которой можно определить основные характеристики объекта. По кривой разгона определяют полное запаздывание объекта τ , постоянную времени T и коэффициент передачи (усиления) объекта K .

Если в точке A , соответствующей максимальной скорости изменения выходной величины $X_{вых}(t)$ (температуры), провести касательную к кривой разгона и продолжить ее до пересечения с линиями начального (т. B) и конечного (т. C) установившихся значений температуры, то отрезок OB соответствует полному запаздыванию τ , а отрезок BE – постоянной времени объекта T . Величина T показывает время, за которое выходная величина достигнет нового установившегося значения при сохранении ее максимальной скорости изменения.

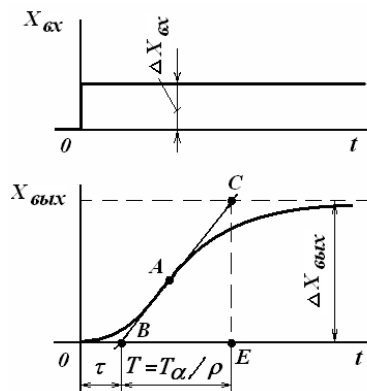


Рис. 3.7. Кривая разгона теплового объекта:
 $\Delta X_{вх}$ – увеличение теплоотдачи воздухонагревателя в относительных единицах; $\Delta X_{вых}$ – увеличение температуры воздуха в помещении в относительных единицах

Коэффициент передачи объекта

$$k = \frac{\Delta X_{вых}}{\Delta X_{вх}},$$

где $\Delta X_{вых}$ и $\Delta X_{вх}$ принимаются в относительных единицах.

Самовыравнивание способствует более быстрой стабилизации регулируемой величины, что облегчает работу регулятора.

Следует заметить, что большинство объектов в системах ТГиВ обладают самовыравниванием.

Временем разгона объекта T_a называется промежуток времени, который бы потребовался для достижения объектом полной нагрузки при сообщении ему максимального возмущающего воздействия. Например, время

опорожнения или наполнения резервуара с водой при постоянной скорости, когда возмущающее воздействие максимальное.

Величину T_a можно определить с помощью кривой разгона из соотношения

$$T_a = \rho \cdot T, \text{ где } \rho = \Delta X_{\text{вх}} / \Delta X_{\text{вых}}.$$

Скоростью разгона ε называется величина, обратная времени разгона T_a

$$\varepsilon = 1/T_a.$$

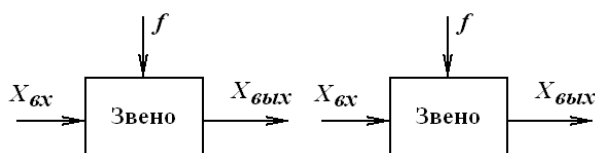
Объектам систем ТГиВ характерны незначительные возмущения, при которых имеют место небольшие скорости изменения регулируемого параметра (температуры, расхода, давления, уровня и др.). С точки зрения автоматического регулирования – это является их положительным свойством.

Запаздывание процесса регулирования τ – это время от момента приложения воздействия до того момента, когда регулируемый параметр начнет изменяться. Различают емкостное и чистое (транспортное) запаздывание.

Емкостное запаздывание зависит от емкости объекта и наблюдается в многоемкостных объектах. Например, любой теплообменный аппарат является двухемкостным объектом.

Чистым запаздыванием называется промежуток времени, после которого действие регулирующего воздействия начнет сказываться на регулируемом объекте.

Сумма чистого и емкостного запаздывания составляет полное запаздывание τ . Эту величину можно определить по кривой разгона объекта регулирования.



Чем больше время полного запаздывания τ , тем труднее регулировать параметры технологического процесса. Поэтому

в многоемкостных объектах необходимо путем применения специальных мер стремиться к уменьшению величины τ . Например, в теплообменных аппаратах необходимо предусматривать минимально возможную толщину стенок воздухонагревателей, водоподогревателей и изготавливать их из малотеплоемких металлов, имеющих значительные коэффициенты теплопроводности. Кроме того, необходимо, чтобы количество греющей воды в теплообменном аппарате на стороне подачи было также минимальным.

2.3. Основные типы объектов автоматического регулирования

Несмотря на разнообразие динамических свойств промышленных объектов регулирования, можно выделить некоторые специфические особенности, присущих большинству из них. Одной из этих особенностей является вид переходной функции объекта регулирования, по которому они классифицируются на три категории: устойчивые, неустойчивые и нейтральные.

Объект устойчив, если после окончания действия внешнего импульсного возмущения (X), он с течением времени возвратится к исходному состоянию.

Устойчивые объекты часто называют объектами, обладающими свойствами самовыравнивания. Только для данных объектов имеют смысл статические характеристика, поэтому они еще именуется - *статические* объекты.

Неустойчивые объекты характеризуются тем, что после окончания внешнего воздействия выходная величина ($Y_{вых}$) продолжает изменяться. Это весьма сложные для автоматического регулирования объекты.

В нейтральных объектах или объектах, не обладающих свойством самовыравнивания, выходная величина после снятия возмущения принимает новое установившееся значение. Эти объекты чаще называют *астатическими*.

Статические и динамические характеристики объектов регулирования можно получить всеми способами, рассмотренными в лекции 3. В данной лекции рассматриваются способы получения характеристик статических и астатических объектов путем обработки их экспериментальных кривых разгона.

Статические объекты. На рис. 2.1 представлены кривые разгона статических объектов, полученные экспериментально при ступенчатом возмущении ΔX . Поставлена и решена задача – определение передаточных функций объектов.

Передаточная функция данного объекта (рис. 2.1 а) может быть представлена в виде:

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp+1}, \quad (4.1)$$

где k , T и τ - коэффициент передачи, постоянная времени и транспортное запаздывание объекта соответственно.

Эти постоянные определяются следующим образом. Коэффициент передачи – это отношение прироста выходной величины при новом

установившемся значении к величине скачка со стороны канала управления, т.е. $k = \Delta Y / \Delta X$.

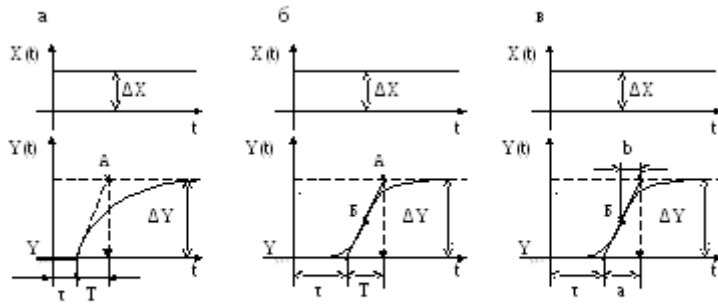


Рис. 4.1 Кривые разгона статических объектов и графическая их обработка.

Временные параметры определяются графически, как это показано на рисунке (а).

На рисунках (2.1 б и 2.1 в) показана кривая разгона, которая наиболее характерна для технологических объектов, в том числе и обогатительных. Здесь

возможно два пути аппроксимации объекта простыми типовыми звеньями. В первом случае объект можно представить двумя звеньями (2.1), во втором – тремя (2.2).

$$W(p) = \frac{k e^{-p\tau}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (2.2)$$

Астатические объекты. Кривая разгона типичного реального астатического объекта показана на рис. 2.2.

Передачная функция такого объекта, представленная двумя последовательно включенными звеньями (реальное интегрирующее и транспортного запаздывания), имеет вид:

$$W(p) = \frac{k e^{-p\tau}}{p(Tp + 1)} \quad (4.3)$$

Определение параметров выражения (2.3) может производиться несколькими способами. Астатический объект характеризуется одним установившимся параметром – скоростью изменения выходной величины.

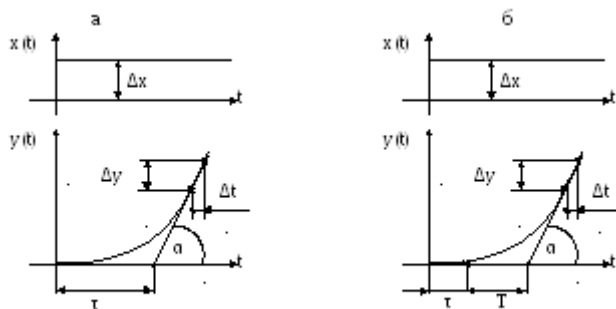


Рис. 4.3 Варианты обработки кривой разгона астатического объекта

Поэтому за коэффициент передачи объекта принимается отношение скорости изменения y (при $t \rightarrow \infty$) к величине возмущения Δx . Скорость изменения выходного параметра оценивается величиной $\tan \alpha$, тогда

с учетом обозначений на (рис. 2.3 а) имеем:

$$\bar{k} = \frac{\tan \alpha}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t \cdot \Delta x},$$

где $\bar{k}$ называют условным коэффициентом передачи.

Постоянная времени (условная) принимается равной:

$$T = 1/k$$

Величина запаздывание объекта (τ) определяется, как показано на рис. 2.3 а.

2.4. Дифференциальные уравнения типовых объектов и методы операционного исчисления для их анализа и синтеза

При изучении систем управления не следует ограничиваться рассмотрением только их установившихся (статических) режимов - такие режимы должны рассматриваться лишь как частные случаи, более общих, не установившихся (динамических) режимов. Поэтому математическим аппаратом изучения производственных объектов должен быть аппарат дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения объекта и контроллера являются математической записью их математических моделей, в которых должны найти отражение те их особенности, которые необходимо учитывать для правильного решения поставленной задачи исследования. Поскольку среди всего многообразия видов дифференциальных уравнений общие методы решения имеют лишь линейные дифференциальные уравнения, то при построении математических моделей объектов следует всегда, когда это только возможно, стремиться к построению линейных математических моделей, т.е. к составлению линейных дифференциальных уравнений.

Так как теория автоматического управления оперирует с математическими моделями реальных физических объектов, то ее методы могут применяться к объектам самой разнообразной физической природы, описываемым одинаковыми уравнениями.

Существование в реальных физических системах не установившихся динамических режимов обусловлено наличием в таких системах емкостей, где аккумулируется вещество или энергия, изменение количества которых не может произойти мгновенно. В зависимости от особенностей движения материально-энергетических потоков внутри управляемых объектов динамические системы делятся на системы: с *распределенными* и *сосредоточенными* параметрами. Для систем с распределенными параметрами необходимо учитывать зависимость скорости указанного движения от геометрических координат, а в случае систем с сосредоточенными параметрами такая зависимость несущественна. Это связано с тем, что распределенность параметров в пространстве сказывается

лишь в тех случаях, когда плотности аккумулированного объектом вещества или энергии присуща пространственная неоднородность

Уравнение материально-энергетического баланса для каждой емкости с однородным пространственным распределением накопленного вещества или энергии в неустановившемся режиме (когда содержание вещества или энергии в емкости меняется) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t), u(t), \lambda(t)], \quad (2.)$$

где $x(t)$ - переменная состояния объекта; $u(t)$ - управляющее воздействие; $\lambda(t)$ - возмущающее воздействие на объект, приводящие к изменению его состояния.

Для объектов с сосредоточенными параметрами состояние $x(t)$ зависит лишь от времени и не зависит от пространственных координат.

Если объект с сосредоточенными параметрами содержит не одну, а $n > 1$ (n - целое положительное число) емкостей, то его поведение будет описываться системой из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно записать в векторном виде

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)], \quad (2.2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ - n -мерный вектор состояния объекта, координаты которого $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ характеризуют содержание вещества или энергии в каждой емкости в момент времени t ; $\mathbf{u}(t)$ - q - мерный вектор управляющих воздействий, причем $q \leq n$; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ - n -мерный вектор возмущающих воздействий.

Функция $\mathbf{F}$ в правой части равенства (2.2) также является n -мерным вектором. В тех случаях, когда хотя бы одна из его координат F_k , $k = \overline{1, n}$ окажется нелинейной функцией векторных переменных $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}(t)$ система уравнений (2.2) называется нелинейной. Поэтому и описываемый этой системой объект также принято считать нелинейным. Напротив, если все эти функции линейны, то и объект называется линейным.

Отметим, что по мере уточнения существующих зависимостей между входными и выходными сигналами управляемых объектов, отвечающие им математические модели усложняются, и линейные уравнения приходится заменять нелинейными. Поэтому на практике обычно имеют дело с нелинейными объектами.

Но и в этих случаях линейные модели часто оказываются весьма полезными. Дело в том, что нелинейную векторную функцию $\mathbf{F}$ в уравнении (2.2) можно приближенно заменить линейной.

Рассмотрим случай, когда векторное возмущающее воздействие $\lambda(t)$ является *аддитивным*, т.е. уравнение (2.2) имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \lambda(t) \quad (2.3)$$

Пусть также для постоянных векторов $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}_0$ выполняется равенство

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{I}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{I}$ - n -мерный нулевой вектор, т.е. вектор, имеющий n координат, каждая из которых равна нулю.

Разложим векторную функцию $\mathbf{F}$ в ряд Тейлора в окрестности векторов $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}_0$, ограничившись лишь двумя первыми членами данного разложения. В результате получим

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times q)$ соответственно, причем

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}; \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}. \quad (2.6)$$

Отметим, что элементы A_{kh} и B_{kj} матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ согласно выражениям (2.6) задаются равенствами

$$A_{kh} = \left. \frac{\partial F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_h} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}; \quad B_{kj} = \left. \frac{\partial F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}.$$

Введя обозначения

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0; \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$$

уравнение (2.3) с учетом равенств (2.4) и (2.5) представим в виде

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \lambda(t) \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) называется *уравнением состояния объекта*.

Таким образом, при малых отклонениях векторов $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ от положения равновесия объекта $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ уравнение (2.3) приближенно можно представить в линейном виде (2.7).

Отметим также, что с помощью измерительной аппаратуры не всегда измеряются координаты вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ объекта. Нередко это бывают другие величины $y_l(t)$, $l = \overline{1, r}$, связанные с векторами $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ функциональной зависимостью

$$y_l(t) = \Psi_l[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \xi_l(t); \quad l = \overline{1, r}, \quad (2.8)$$

где $\xi_l(t)$ - сигналы различных помех, обусловленных шумами датчиков и наводками в линиях связи.

При выполнении процедуры линеаризации равенства (2.8) также линеаризуются. Представим их в векторном виде

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.9)$$

где $\mathbf{y}(t)$, Ψ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ - r -мерные векторы ($r \leq n$). Разложим векторную функцию Ψ в ряд Тейлора в окрестности вектора $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, ограничившись при этом лишь двумя первыми членами этого ряда

$$\Psi[\mathbf{x}(t)] \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{y}_0 = \Psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0); \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}; \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}.$$

Используя обозначение

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0,$$

а также приближенное равенство (2.10), представим выражение (2.9) в линейном виде

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.11)$$

где матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ имеют соответственно размерности $(r \times n)$ и $(r \times q)$. Обычно матрица $\mathbf{C}$ называется *матрицей состава измерений*, а уравнение (2.11) - *уравнением выхода*, т.к. оно определяет, регистрируемый измерительной аппаратурой на выходе объекта, вектор $\hat{\mathbf{y}}(t)$.

Уравнения (2.11) и (2.7) называются *уравнениями движения объекта*, т.к. они описывают процесс изменения его переменных состояния и других, связанных с ними величин.

Линейные уравнения движения объекта

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t); \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.13)$$

отличаются от уравнений (2.7), (2.11) тем, что переменные в линеаризованных уравнениях имеют сверху «крышечку». Однако в дальнейшем, там, где это не ведет к каким-либо недоразумениям, данное обозначение будем опускать, т.е. в основном будем использовать уравнения (2.12) и (2.13).

Предположим, что в уравнениях (2.12) и (2.13) векторные сигналы $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ отсутствуют, а величины $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ являются скалярными, т.е. выполняются равенства

$$\mathbf{y}(t) = y_1(t); \quad \mathbf{u}(t) = u_1(t). \quad (2.14)$$

Выполнение равенств (2.14) означает, что объект имеет лишь один вход и один выход. В таком случае уравнения (2.12) и (2.13) принимают вид

$$y_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + D_{11}u_1(t); \quad (2.15)$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u_1(t), \quad (2.16)$$

где $\mathbf{b}$ - n -мерный вектор, а $\mathbf{C}$ - матрица размерности $(1 \times n)$.

Координаты $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ вектора $\mathbf{x}(t)$ можно выразить через $y_1(t)$, $u_1(t)$ и их производные по времени до $n - 1$ порядка включительно.

Действительно, продифференцировав по времени уравнение (2.15) получим

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}. \quad (2.17)$$

После подстановки в уравнение (2.17) выражения для $d\mathbf{x}(t)/dt$ из уравнения (2.16) имеем

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \mathbf{CA}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{b}u_1(t) + D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}.$$

В результате, для определения координат вектора $\mathbf{x}(t)$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = y_1(t) - D_{11}u_1(t); \\ \mathbf{CA}\mathbf{x}(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} - \mathbf{C}\mathbf{b}u_1(t) - D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}; \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(t) = \frac{d^{n-1}y_1(t)}{dt^{n-1}} - \mathbf{C}\mathbf{b} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} - D_{11} \frac{d^{n-1}u_1(t)}{dt^{n-1}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Система (2.18) имеет решение лишь в тех случаях, когда ранг матрицы

$$M_{nb} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

равен n . Матрица M_{nb} называется матрицей наблюдаемости и имеет размерность $(n \times n)$, т.к. размерности каждой из составляющих ее матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{CA}$, ..., $\mathbf{CA}^{n-1}$ равны $(1 \times n)$.

Задача восстановления координат вектора $\mathbf{x}(t)$ по результатам регистрации выходных сигналов объекта $\mathbf{y}(t)$ и управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ получила название *задачи наблюдения*, если возмущениями $\lambda(t)$ и помехами $\xi(t)$ можно пренебречь.

Таким образом, восстановление всех координат вектора $\mathbf{x}(t)$ оказывается принципиально возможным в тех случаях, когда задача наблюдения разрешима, т.е. объект управления вполне наблюдаем (ранг матрицы $M_{нб}$ равен n).

Вернемся к рассмотрению системы (2.18), полагая управляемый объект вполне наблюдаемым. Поскольку находящиеся в правой части системы уравнений (2.18) выражения линейно зависят от $y_1(t)$, $u_1(t)$ и их производных по времени до $n-1$ порядка включительно, то через линейную комбинацию этих же величин окажутся выраженными и координаты вектора $\mathbf{x}(t)$. Тогда после их подстановки в уравнение (2.16) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k}, \quad (2.20)$$

где α_k и β_k - постоянные коэффициенты. Уравнение (2.20) устанавливает взаимосвязь между входной $u_1(t)$ и выходной $y_1(t)$ величинами объектов, причем порядок старшей производной в его правой части не должен превышать ее порядок в левой части данного уравнения, т.к. в противном случае объект невозможно реализовать технически.

Многомерные линейные стационарные объекты, имеющие q входов и r выходов, описываются системой линейных уравнений, аналогичных уравнению (2.20), т.е.

$$\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} \frac{d^k u_j(t)}{dt^k}; \quad n_h \geq n_j; \quad (h = \overline{1, r}; j = \overline{1, q}), \quad (2.21)$$

где n_h и n_j - положительные целые числа; h и j - номера выходов и входов объекта.

Рассмотрим также обратную задачу. Пусть одномерный объект, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t), \quad (2.22)$$

где $\lambda_n(t)$ - возмущающее воздействие, требуется описать в пространстве состояний, т.е. перейти к системе уравнений (2.15) и (2.16). Тогда требуемый переход можно выполнить, воспользовавшись обозначениями

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = x_{k+1}(t), \quad k = \overline{1, n-1}; \quad (2.23)$$

$$\frac{du_k(t)}{dt} = u_{k+1}(t), \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (2.24)$$

Выражения (2.23) и (2.24) определяют координаты вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ и вектора управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ для объекта (2.22).

Полагая, что

$$C_{11} = 1, C_{hk} = D_{hk} = 0, (h > 1, k > 1); \xi(t) \equiv 0,$$

запишем уравнение (2.13) в скалярном виде

$$y_1(t) = x_1(t) + D_{11}u_1(t), \quad (2.25)$$

где C_{hk} и D_{hk} – элементы матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ соответственно.

Подставив в уравнение (2.22) выражение (2.25) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n (\beta_k - \alpha_k D_{11}) \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t). \quad (2.26)$$

Выберем значение величины D_{11} так, чтобы выполнялось равенство

$$D_{11} = \frac{\beta_n}{\alpha_n}. \quad (2.27)$$

С учетом выражения (2.27) уравнение (2.26) представим в виде

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t), \quad (2.28)$$

где

$$\gamma_k = \beta_k - \alpha_k D_{11}, k = \overline{0, n-1}. \quad (2.29)$$

Воспользовавшись обозначениями (2.23) и (2.24) уравнение (2.28) запишем следующим образом:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_n} x_k(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{k-1}}{\alpha_n} u_k(t) + \lambda_n(t). \quad (2.30)$$

Обозначив

$$A_{nk} = - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_n}; \quad B_{nk} = \frac{\gamma_{k-1}}{\alpha_n}, k = \overline{1, n}, \quad (2.31)$$

уравнение (2.30) приведем к виду

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{nk} x_k(t) + \sum_{k=1}^n B_{nk} u_k(t) + \lambda_n(t). \quad (2.32)$$

Кроме того, полагая

$$A_{kh} = \begin{cases} 1, & h = k+1; \\ 0, & h \neq k+1; \end{cases} B_{kh} = 0, \lambda_k(t) \equiv 0, (k = \overline{1, n-1}; h = \overline{1, n}), \quad (2.33)$$

уравнения (2.23) также представим в виде, аналогичным (2.32), т.е.

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{h=1}^n A_{kh} x_h(t) + \sum_{h=1}^n B_{kh} u_h(t) + \lambda_k(t), k = \overline{1, n-1}. \quad (2.34)$$

Уравнения (2.32) и (2.34) с учетом выражений (2.29), (2.31) и (2.33) представляют собой запись матрично-векторного уравнения движения объекта (2.12) в скалярном виде.

Таким образом, при отсутствии шумов и помех уравнения (2.12), (2.13) эквивалентны уравнению (2.22). Если пренебрегать шумами и помехами недопустимо, то указанная эквивалентность имеет место лишь в тех случаях, когда в уравнении (2.22) порядок старшей производной в правой части ниже, чем в левой, т.е. $\beta_n = 0$. При этом шумы и помехи добавляются к возмущающим воздействиям.

2.5. Динамические характеристики объектов управления: передаточная функция, переходная характеристика

Передаточная функция

Для исследования процессов, связанных с изменением материально-энергетических потоков в объектах необходимо получить решения его уравнений движения. С точки зрения простоты получения решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и компактности их представления наибольшими преимуществами обладает метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ – n -вектор состояния объекта, тогда его изображение $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, т.е. результат применения к нему преобразования Лапласа, определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{-st} dt, \quad (2.35)$$

где s – комплексное число, причем $\operatorname{Re} s > 0$.

По изображению $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ можно восстановить оригинал, т.е. вектор $\mathbf{x}(t)$, если воспользоваться обратным преобразованием Лапласа

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{\mathbf{x}}(s) e^{st} ds,$$

где γ – положительное вещественное число.

Однако обратное преобразование Лапласа используется не столь часто как прямое, т.к. представление информации о динамике управляемых процессов в виде их изображений во многих случаях лучше отвечает специфическим особенностям задач управления.

Отметим, что для преобразования Лапласа используют сокращенное символическое обозначение

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = L\{\mathbf{x}(t)\},$$

а обратное преобразование Лапласа обозначают как

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\{\tilde{\mathbf{x}}(s)\}.$$

Применим преобразование Лапласа к уравнениям движения объекта (2.12) и (2.13), предполагая при этом, что помехи и возмущения отсутствуют, а начальные условия нулевые, т.е.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}. \quad (2.36)$$

В результате для изображений, входящих в эти уравнения векторов, получим систему, но уже не дифференциальных, а алгебраических уравнений

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s); \quad (2.37)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (2.38)$$

Действительно, поскольку при $\text{Re } s > 0$ выполняются равенства

$$L\left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mathbf{x}(t) = e^{-st}\mathbf{x}(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)de^{-st} = \mathbf{x}(0) + s\tilde{\mathbf{x}}(s),$$

то с учетом (3.2) имеем

$$L\left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right] = \mathbf{I} + s\tilde{\mathbf{x}}(s) = s\tilde{\mathbf{x}}(s).$$

Следовательно, в результате применения преобразования Лапласа уравнение (2.12) представляется в виде (3.37).

Из уравнения (3.37) нетрудно получить выражение для вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Для этого представим это уравнение в виде

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s), \quad (2.39)$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица размерности $(n \times n)$, т.е. матрица, все элементы которой, располагающиеся на главной диагонали равны единице, а остальные - нулю. Умножим обе части равенства (2.39) на матрицу $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, обратную матрице $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Поскольку

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}(s) = \tilde{\mathbf{x}}(s),$$

то

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (2.40)$$

Обозначим

$$\mathbf{W}_{ux}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (2.41)$$

тогда выражение (2.40) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{W}_{ux}(s)\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (2.42)$$

Функция $\mathbf{W}_{ux}(s)$ комплексной переменной s называется матричной передаточной функцией объекта, отвечающей каналу передачи векторных сигналов $\tilde{\mathbf{u}}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$, причем на вход данного канала поступает сигнал с изображением $\tilde{\mathbf{u}}(s)$, а на его выходе появляется сигнал с изображением $\tilde{\mathbf{x}}(s)$.

При нулевых начальных условиях с помощью передаточной функции $\mathbf{W}_{ux}(s)$ можно по изображению входного сигнала $\tilde{\mathbf{u}}(s)$ определить изображение выходного сигнала $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, воспользовавшись для этого выражением (2.42).

При наличии возмущающих воздействий $\lambda(t)$ желательно установить, как они влияют на состояние объекта. Для этого воспользуемся уравнением состояния (2.12). Применяв к нему преобразование Лапласа, получим уравнение для изображений

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s) + \tilde{\lambda}(s). \quad (2.43)$$

Затем, действуя так же, как и при выводе формулы (2.40), из уравнения (2.43) получим

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s) + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\tilde{\lambda}(s). \quad (2.44)$$

Полагая, что

$$\mathbf{W}_{\lambda x}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}, \quad (2.45)$$

выражение (2.44) с учетом уже введенного обозначения (3.7) представим в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{W}_{ux}(s)\tilde{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{W}_{\lambda x}(s)\tilde{\lambda}(s), \quad (2.46)$$

где функция $\mathbf{W}_{\lambda x}(s)$ называется передаточной функцией канала $\tilde{\lambda}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$, т.к. она определяет влияние вектора $\tilde{\lambda}(s)$ на вектор $\tilde{\mathbf{x}}(s)$.

Как видно из выражения (2.46), на вектор $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ одновременно оказываются воздействия по двум каналам $\tilde{\mathbf{u}}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$ и $\tilde{\lambda}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$. С точки зрения эффективности управления, воздействия $\tilde{\lambda}(s)$ являются нежелательными и чтобы уменьшить их влияние на состояние объекта применяются воздействия $\tilde{\mathbf{u}}(s)$.

Получим теперь выражение для скалярной передаточной функции $W_{uy}(s)$, отвечающей каналу $\tilde{u}_1(s) \rightarrow \tilde{y}_1(s)$ объекта, описываемого дифференциальным уравнением (2.20). После применения к этому уравнению преобразования Лапласа имеем

$$\left[\sum_{k=0}^n \alpha_k s^k \right] \tilde{y}_1(s) = \left[\sum_{k=0}^n \beta_k s^k \right] \tilde{u}_1(s). \quad (2.47)$$

Поскольку

$$W_{uy}(s) = \frac{\tilde{y}_1(s)}{\tilde{u}_1(s)},$$

то, воспользовавшись равенством (2.47) определим искомую передаточную функцию

$$W_{uy}(s) = \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k s^k}{\sum_{h=0}^n \alpha_h s^h} . \quad (2.48)$$

Получим передаточные функции для многомерного линейного объекта (2.21). После применения к системе уравнений (2.21) преобразования Лапласа получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} s^k \tilde{y}_h(s) = \sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} s^k \tilde{u}_j(s) ; \quad n_h \geq n_j ; \quad (h = \overline{1, r} ; j = \overline{1, q}) . \quad (2.49)$$

Согласно (2.49) передаточная функция $W_{jh}^{ob}(s)$, отвечающая каналу объекта с j входом и h выходом, задается выражением

$$W_{jh}^{ob}(s) = \frac{\tilde{y}_h(s)}{\tilde{u}_j(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} s^k}{\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} s^k} . \quad (2.50)$$

Совокупность передаточных функций (2.50) определяет матрицу $\mathbf{W}^{ob}(s)$ размерности $(r \times q)$.

Как видно из выражений (2.48) и (2.50) передаточные функции объектов с сосредоточенными параметрами представляют собой отношение двух полиномов от комплексной переменной, причем степень полинома числителя не должна превышать степени полинома знаменателя.

Переходная характеристика

К динамическим характеристикам объекта относятся также **временные характеристики**.

Рассмотрим временные характеристики объекта, которые называются **переходными**. Такое название объясняется тем, что эти характеристики описывают процесс перехода объекта из одного установившегося состояния в другое под влиянием внешних воздействий.

Реакцию объекта на единичное ступенчатое входное воздействие называют **переходной характеристикой объекта** (рис. 4.1) и обозначают $h(t)$.

Под **реакцией объекта** понимается изменение его выходной величины, обусловленное лишь входным воздействием, т.е. в отсутствие свободного движения объекта и возмущающих воздействий.



Рисунок 2.4 – Получение переходной характеристики объекта
Еди́нчи́ное ступе́нчатое возде́йствие $1(t)$ описывается следующим выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

График функции $1(t)$ представлен на рис. 2.5.

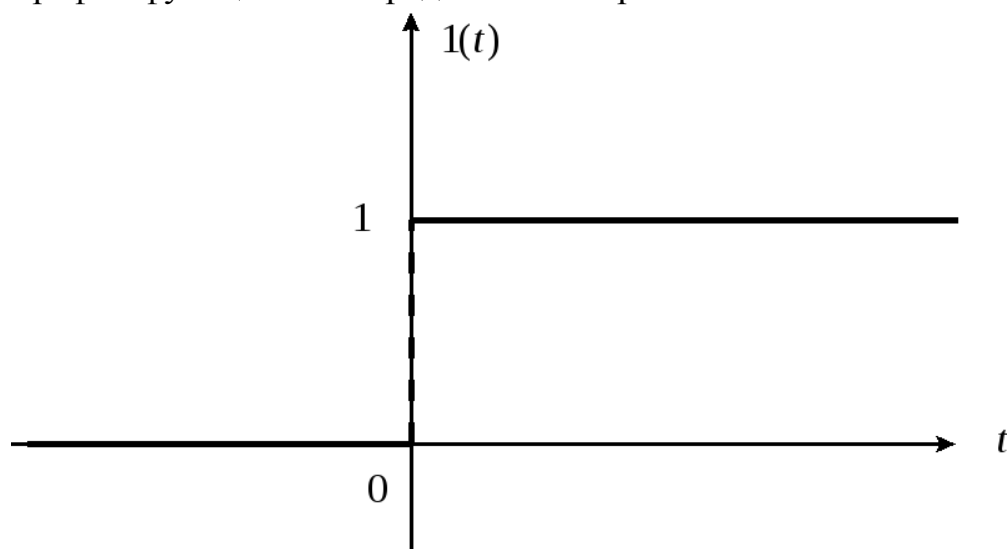


Рисунок 2.5 – Еди́нчи́ное ступе́нчатое возде́йствие.

Установим взаимосвязь между переходной характеристикой объекта $h(t)$ и его передаточной функцией $W_{об}(s)$. Для этого воспользуемся, вытекающим из определения передаточной функции $W_{об}(s)$, равенством

$$\tilde{h}(s) = W_{об}(s) \tilde{1}(s), \quad (2.63)$$

где $\tilde{h}(s)$ и $\tilde{1}(s)$ – изображения по Лапласу функций $h(t)$ и $1(t)$ соответственно.

Применив, с учетом выражения (2.62), преобразование Лапласа к функции $1(t)$ получим

$$\tilde{1}(s) = \frac{1}{s}. \quad (2.64)$$

После подстановки выражения (2.64) в равенство (2.63) имеем

$$\tilde{h}(s) = \frac{W_{об}(s)}{s}. \quad (2.65)$$

В результате применения к равенству (2.65) обратного преобразования Лапласа приходим к выражению

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{W_{об}(s)}{s} e^{st} ds, \quad (2.66)$$

которое и устанавливает искомую взаимосвязь.

Взаимосвязь между $h(t)$ и КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$ устанавливает следующая теорема:

Теорема 2.2. Для линейных стационарных объектов, передаточные функции которых $W_{об}(s)$ не имеют особенностей при $\text{Re } s > 0$, т.е. в правой комплексной полуплоскости, выполняется равенство

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \text{Re} W_{об}(i\omega) d\omega \quad (2.67)$$

Отметим, что согласно выражению (2.67) должно выполняться равенство

$$h_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = W_{об}(0),$$

где $h_{уст}$ – установившееся значение переходной характеристики $h(t)$.

Действительно, чем большее значение принимает переменная времени t , тем точнее выполняется равенство

$$h(t) \approx \text{Re} W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega,$$

где ε – малое положительное число. Поскольку интеграл

$$W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega,$$

ввиду быстрых осцилляций функции $\sin(\omega t)$ принимает весьма малые значения, то

$$h(t) \approx W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \approx W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = W_{об}(0),$$

т.к.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad (t > 0).$$

Рассмотрим пример определения переходной характеристики объекта $h(t)$ с помощью выражения (2.67).

Пример. Построим график переходной характеристики объекта $h(t)$, передаточная функция которого $W_{об}(s)$ имеет вид

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^3},$$

причем $K_{об} = 1,5$; $T = 10$ с. В таком случае

$$\text{Re} W_{об}(i\omega) = K_{об} \frac{(1 - 3T^3\omega^3)}{(1 + T^2\omega^2)^3}.$$

Поскольку знаменатель передаточной функции $W_{об}(s)$ обращается в нуль лишь при $s = -1/T = -0,1 \text{ с}^{-1}$, то эта функция не имеет особенностей при $\text{Re } s > 0$.

Следовательно, при построении графика $h(t)$ допустимо использовать выражение (2.67). Этот график представлен на рис. 2.6, причем пунктирной линией показана асимптота $h_{уст} = K_{об}$, к которой функция $h(t)$ неограниченно приближается при $t \rightarrow \infty$.

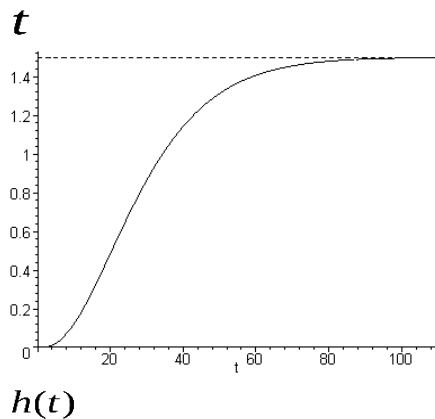


Рисунок 2.6.

На основании экспериментально снятой переходной характеристики объекта, обычно ее называют **кривой разгона**, можно получить аналитическое выражение для передаточной функции канала управления или дифференциальное уравнение. Эта задача называется **задачей идентификации** объекта по кривой разгона.

Наряду с переходной характеристикой $h(t)$ часто используется **импульсная переходная характеристика $w(t)$** , которая представляет собой реакцию объекта на дельта-импульс $\delta(t)$, т.е. в идеале бесконечно короткий, но имеющий бесконечно большую амплитуду импульс, существующий в момент времени $t = 0$, площадь под «графиком» которого равна единице (естественно, в соответствующих единицах измерения, в которые в качестве сомножителя входит время).

Импульсная переходная характеристика объекта $w(t)$, связана с его переходной характеристикой $h(t)$ и передаточной функцией $W_{об}(s)$.

Действительно, при подаче на вход объекта единичного ступенчатого воздействия $1(t)$ выполняются равенства

$$u(t) = 1(t); y(t) = h(t).$$

Подставив их в связывающее входной и выходной сигналы объекта дифференциальное уравнение (2.20) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k 1(t)}{dt^k} . \quad (2.68)$$

Если на вход объекта подается воздействие $\delta(t)$, то $u(t) = \delta(t)$; $y(t) = w(t)$, (2.69)

и дифференциальное уравнение (2.20) принимает вид

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} . \quad (2.70)$$

Поскольку ввиду (2.62) имеет место равенство

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t) ,$$

то, продифференцировав по времени уравнение (2.68) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{dh(t)}{dt} \right] = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} . \quad (2.71)$$

Сопоставив уравнения (2.69) и (2.71) установим, что

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} . \quad (2.72)$$

Что касается передаточной функции $W_{об}(s)$, то, исходя из ее определения, запишем следующее равенство:

$$W_{об}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)} . \quad (2.73)$$

Применив к равенствам (2.69) преобразование Лапласа по времени представим их в виде

$$\tilde{u}(s) = 1; \tilde{y}(s) = \tilde{w}(s) . \quad (2.74)$$

Подставив изображения, заданные выражениями (2.74), в равенство (2.73) имеем

$$\tilde{w}(s) = W_{об}(s) . \quad (2.75)$$

Таким образом, искомая взаимосвязь между $w(t)$ и другими динамическими характеристиками объекта $h(t)$ и $W_{об}(s)$ устанавливается выражениями (2.72) и (2.75).

Чтобы проиллюстрировать методы построения импульсных переходных характеристик $w(t)$ рассмотрим пример.

Пример. Построим график функции $w(t)$ для объекта, рассмотренного в примере 2.3. Для этого воспользуемся равенством (4.15), подставив в него выражение (4.6). В результате имеем

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \operatorname{Re} W_{об}(i\omega) d\omega . \quad (2.76)$$

График $w(t)$, полученный в результате выполнения численных расчетов с использованием выражения (2.76) представлен на рис. 2.7.

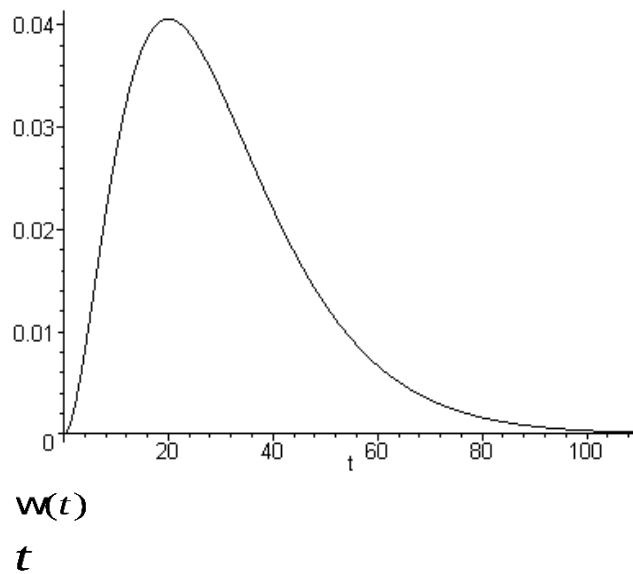


Рисунок 2.7.

Как видно из рис. 2.7, функция $w(t)$ имеет один максимум, достигаемый согласно выражению (2.72) в точке перегиба переходной характеристики $h(t)$, т.к. именно в этой точке угол наклона касательной к кривой $h(t)$ максимален.

Важное значение импульсной переходной характеристики объекта $w(t)$ обусловлено еще и тем, что с ее помощью можно определить реакцию объекта не только на стандартные воздействия $1(t)$ и $\delta(t)$, но и на воздействие произвольного вида $f(t)$. В этом случае выходной сигнал объекта $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t w(\xi) f(t - \xi) d\xi,$$

которое получило название *интеграла Дюамеля* или *свертки* функций $w(t)$.