

ЛЕКЦИЯ 3

Тема: Типовые звенья систем автоматического управления

Вопросы:

1. Передаточные функции типовых звеньев и формирование из них структур САУ и параметры их настройки.
2. Типовые соединения: последовательное, параллельное, встречно-параллельное.

3.1. Передаточные функции типовых звеньев и формирование из них структур САУ и параметры их настройки

Передаточная функция звена в общем случае представляет собой отношение двух полиномов:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

Полином произвольного порядка можно разложить на простые множители $k_1 p$; $(d_1 p + d_2)$; $(d_1 p^2 + d_2 p + d_3)$, поэтому передаточную функцию можно представить как произведение простых множителей или простых дробей вида:

$$\frac{k_2}{p} ; \frac{1}{d_1 p + d_2} ; \frac{1}{d_1 p^2 + d_2 p + d_3} .$$

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или простых дробей, называют *типовыми* или *элементарными* звеньями. Элементарные множители, представляющие собой полиномы первого и второго порядка, преобразовываются к стандартному виду, принятому в теории автоматического управления:

$$k(Tp + 1) ; k(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1) ,$$

где:

- k ($k > 0$) - коэффициент передачи,
- T ($T > 0$) - постоянная времени (имеет размерность единицы времени),
- ξ - коэффициент демпфирования (затухания).

Основные типы звеньев делятся на: позиционные, дифференцирующие и интегрирующие.

Позиционными звеньями называются такие звенья, в передаточной функции которых многочлены $M(p)$ и $N(p)$ имеют свободные члены.

У дифференцирующих звеньев в передаточной функции отсутствует свободный член числителя, т.е. для однократно дифференцирующих звеньев передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{pM_1(p)}{N(p)} , \text{ где } M_1(p) - \text{свободный член.}$$

У интегрирующих звеньев в передаточной функции отсутствует свободный член знаменателя, т.е.:

$$W(p) = \frac{M(p)}{pN_1(p)}.$$

1. Аperiodическое звено. Стандартная форма записи уравнения звена: $Ty' + y = kx$

А

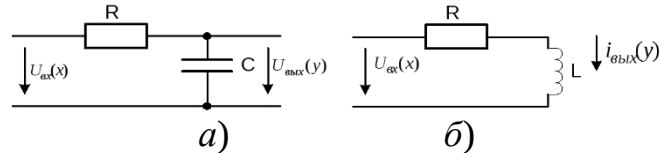


Рисунок 3.1 – Схемы реализации

апериодического звена

периодическими звеньями являются RC и RL цепи, входные и выходные величины которых показаны соответственно на рисунке 3.1,а и 3.2,б.

В операторной форме напряжение и ток на выходе для схемы (рис. 3.1,а) соответственно равны:

$$U_{\text{вых}}(p) = I(p) \frac{1}{Cp} \quad \text{и} \quad I_{\text{вых}}(p) = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U_{\text{вх}}(p) \cdot pC}{RCp + 1}.$$

Тогда:

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{U_{\text{вх}}(p) \cdot pC}{(1 + RCp) \cdot pC} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{1 + RCp}.$$

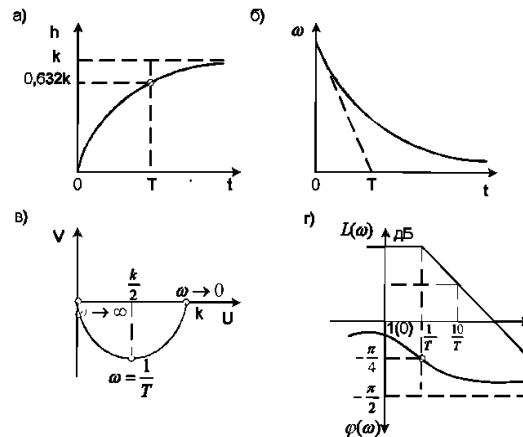


Рисунок 3.2 – Характеристики

апериодического звена первого порядка

Передаточная функция апериодического звена:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{(1 + RCp) \cdot U_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + RCp},$$

В общем случае *передаточная функция* апериодического звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad \text{где: } k = 1, T = RC.$$

Переходная функция апериодического звена (рис. 3.2,а):

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})$$

Весовая функция апериодического звена (рис. 3.2,б):

$$\omega(t) = h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$$

Если характеристики этих функций получены экспериментально, по ним можно определить значения T и k и получить уравнение звена. За длительность переходного процесса принимают время, в течение которого выходная величина достигает 95% ее конечного значения.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) апериодического звена (рис. 14,в):

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 - jT\omega)(1 + jT\omega)} = \frac{k - jkT\omega}{1 + T^2\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$\text{где: } U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{-kT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Эта характеристика представляет собой полуокружность с радиусом $k/2$ и центром с координатами $(k/2; j = 0)$ на действительной оси.

Амплитудно-частотная (АЧХ) апериодического звена:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\frac{k^2 + k^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

Фазовая частотная характеристики (ФЧХ) апериодического звена:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = \arctg \frac{-kT\omega(1 + T^2\omega^2)}{(1 + T^2\omega^2)k} = -\arctg T\omega$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) апериодического звена (рис. 14,г):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

Приближенно ЛАЧХ можно заменить двумя асимптотами, к которым она стремится при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. Приближенная ЛАЧХ называется асимптотической.

- при малых значениях $\omega \ll 1/T$, $\rightarrow \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 1$, т.е. $L(\omega) = 20 \lg k$ - в этом случае ЛАЧХ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и проходящую на уровне $20 \lg k$.

- на больших частотах, когда $\omega \gg 1/T$, $\rightarrow \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx T\omega$, т.е. $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega$ - в этом случае характеристика представляет собой прямую имеющую наклон минус 20 дБ/дек.

Обе асимптоты пересекаются в точке, соответствующей $\omega = 1/T$. Эта частота называется *сопрягающей*.

На фазовой частотной характеристике (ФЧХ) при $\omega \rightarrow \infty$ значение ϕ изменяется от 0 до минус $\pi/2$.

2. Колебательное звено. Уравнение колебательного звена имеет вид: $T_0 y'' + T_1 y' + y = kx$.

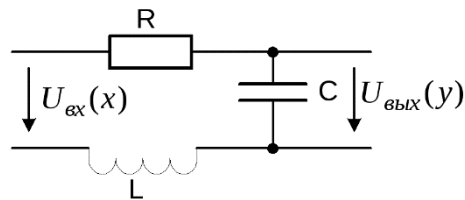


Рисунок 3.3 – Схема реализации колебательного звена

Оно представляет собой последовательное соединение RLC элементов (рис. 3.3).

В операторной форме напряжение на выходе колебательного звена:

$$U_{\text{вых}}(p) = I(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} \cdot \frac{1}{Cp} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{CLp^2 + RCp + 1}, \text{ где: } CL = T_0^2, CR = T_1.$$

Принято обозначать $T_0 = T$, $T_1 = 2\xi T$, тогда *передаточная функция* колебательного звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)U_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1},$$

Коэффициент ξ (дзета) называется коэффициентом *демпфирования* (затухания). Если $0 < \xi < 1$, звено называется *колебательным*; если $\xi = 0$ ($T_1 = 0$), звено называется *консервативным*, если $\xi \geq 1$ - *апериодическим звеном второго порядка*.

А

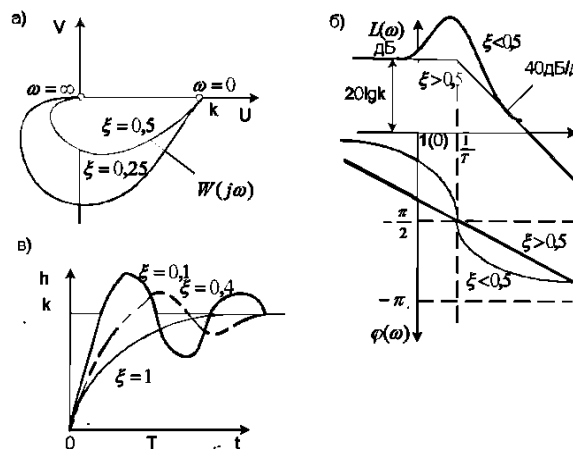


Рисунок 3.4 - Характеристики колебательного звена

Периодическое звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка. Оно не относится к числу элементарных звеньев.

В общем случае *амплитудно-фазовая частотная характеристика* звена (рис. 16,а):

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + j2\xi T\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2T\xi\omega} \text{ где } k = 1.$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно сопряженное знаменателю выражение, получим:

$$W(j\omega) = \frac{k[(1 - T^2\omega^2) - j2T\xi\omega]}{[(1 - T^2\omega^2) - j2T\xi\omega][(1 - T^2\omega^2) + j2T\xi\omega]} = \frac{k - kT^2\omega^2 - j2kT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2},$$

Отсюда вещественная и мнимая частотные характеристики колебательного звена:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \quad \text{и} \quad V(\omega) = \frac{-2T\xi k\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена (АЧХ):

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\left[\frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \right]^2 + \left[\frac{-2T\xi k\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{k^2[(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2]}{[(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2]^2}} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}}$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) колебательного звена:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

При малых значениях частоты $\omega < 1/T = \omega_c$ в выражении $\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$ можно пренебречь величиной $T^2\omega^2$, а при значениях частоты $\omega > 1/T$ в выражении $\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$ можно пренебречь единицей и слагаемым $(2\xi T\omega)^2$. Тогда уравнение асимптотической ЛАЧХ колебательного звена можно записать:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k, & \text{и} \quad \omega < \omega_c \\ 20 \lg k - 40 \lg T\omega, & \text{и} \quad \omega \geq \omega_c \end{cases}$$

Асимптотическая ЛАЧХ (рис. 16,б) при $\omega < 1/T = \omega_c$ (ω_c - сопрягаемая частота) параллельна оси частот, а при $\omega \geq 1/T$ имеет наклон минус 40 дБ/декаду. При значениях $0,5 < \xi < 1$ характеристика близка к ломанной линии, если $\xi < 0,5$, то получается заметный «горб», который уходит в бесконечность при $\xi \rightarrow 0$. Роль постоянных времени T_0 и T_1 в уравнении колебательного звена следующая: постоянная T_0 - «раскачивает» колебания, а T_1 - демпфирует их.

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) (рис. 16,б) изменяется монотонно в интервале от 0 до $-\pi$.

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \quad \text{и} \quad \omega \leq \infty$$

Переходная функция колебательного звена (рис. 16,в) при нулевых начальных условиях:

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \phi_0) \right],$$

где: $\alpha = \frac{\xi}{T}$; $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$; $\phi_0 = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$.

При $\xi \rightarrow 0$ переходная характеристика представляет собой график гармонических колебаний.

Весовая функция колебательного звена:

$$\omega(t) = h(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t$$

3. Интегрирующее звено. Уравнение идеального интегрирующего звена имеет вид:

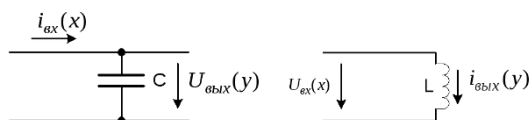


Рисунок 3.5 – Схема реализации интегрирующего звена

$$y = kx; \quad y = k \int x dx$$

Идеальными интегрирующими звеньями являются цепи с элементами C и L (рис. 3.5). В первом случае входной величиной x является ток заряда конденсатора, а напряжение на нем – выходной величиной y . Во втором случае входной величиной x является напряжение на индуктивности, а ток – выходной величиной y .

Отличительным свойством интегрирующего звена является то, что после прекращения действия входного сигнала x выходной сигнал звена y остается на том уровне, на котором был в момент исчезновения входного сигнала. Иначе говоря, интегрирующее звено обладает свойством «запоминать» последнее значение выходной величины. Благодаря «памяти» интегрирующего звена достигается астатизм автоматической системы.

В операторной форме уравнение интегрирующего звена:

$$pY(p) = kX(p).$$

П

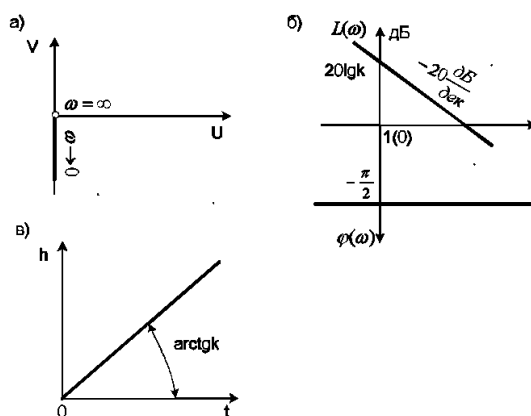


Рисунок 3.6 – Характеристики интегрирующего звена

Передаточная функция интегрирующего звена:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{kX(p)}{pX(p)} = \frac{k}{p}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) интегрирующего звена (рис. 18,а):

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -\frac{jk\omega}{\omega^2} = -\frac{jk}{\omega},$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики имеют вид:

$$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) интегрирующего звена:

$$A(\omega) = \sqrt{0 - \frac{k^2}{\omega^2}} = \frac{k}{\omega}.$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ интегрирующего звена (рис.3.6,б):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Асимптотическая ЛАЧХ (рис. 18,б) представляет собой прямую, проходящую через точку $20 \cdot \lg k$ при $\omega = 1$ с наклоном минус 20 дБ/дек.

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ) интегрирующего звена:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

Переходная характеристика интегрирующего звена (рис. 18,в):

$$h(t) = kt$$

Весовая функция интегрирующего звена:

$$\omega(t) = h(t) = k$$

Реальные интегрирующие звенья являются инерционными. Их передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}$$

Характеристики реального интегрирующего звена можно получить, представив его как последовательное соединение идеальных интегрирующего и апериодического звеньев.

4. Дифференцирующее звено. Уравнение идеального дифференцирующего звена:

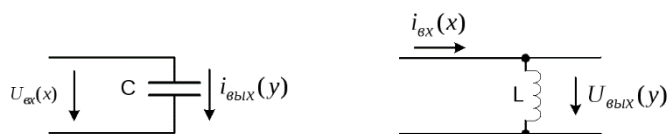


Рисунок 3.7 – Схема реализации дифференцирующего звена

Идеальными дифференцирующими звеньями являются цепи с конденсатором и элементом индуктивности (рис. 3.7). Входной величиной x в первом случае является напряжение, а во втором - ток. Выходной величиной y в первом случае является ток, а во втором - напряжение.

В операторной форме уравнение дифференцирующего звена имеет вид:

$$Y(p) = kpX(p).$$

Уравнение передаточной функции дифференцирующего звена:

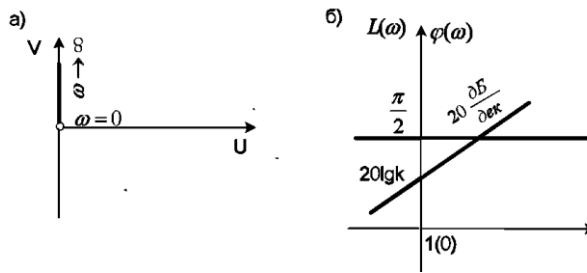


Рисунок 3.8 – Характеристики

дифференцирующего звена

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{kpX(p)}{X(p)} = kp.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) дифференцирующего звена:

$$W(j\omega) = jk\omega,$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики имеют вид (рис.20,а):

$$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = k\omega$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) дифференцирующего звена:

$$A(\omega) = \sqrt{k^2 \omega^2} = k\omega.$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ дифференцирующего звена:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Асимптотическая ЛАЧХ (рис. 20,б) представляет собой прямую, проходящую через точку $20 \lg k$ при $\omega = 1$ с наклоном плюс 20 дБ/дек.

Выражение для логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) дифференцирующего звена:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \infty = +\frac{\pi}{2}$$

Переходная характеристика дифференцирующего звена:

$$h(t) = \delta$$

Весовая функция дифференцирующего звена:

$$\omega(t) = h(\tau) = \delta$$

где δ – дельта-функция (производная от единичной функции): $x(t) = \delta(t) = 1'(t)$,

Реальные дифференцирующие звенья являются инерционными. Передаточная функция такого звена:

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$$

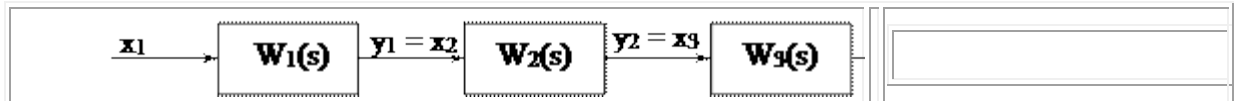
Характеристики реального дифференцирующего звена можно получить представив его, как последовательное соединение идеальных дифференцирующего и апериодического звеньев.

3.2. Типовые соединения: последовательное, параллельное, встречно-параллельное

Выделяют три типовых соединения:

- последовательное
- параллельное
- встречно-параллельное (соединение 2^x звеньев по схеме с о.с.)

1. Последовательное соединение



$$y_1 = W_1(s)x_1,$$

$$x_2 = y_1$$

$$y_2 = W_2(s)x_2,$$

$$x_3 = y_2$$

$$y_3 = W_3(s)x_3$$

$$y_3 = W_3(s) \cdot W_2(s) \cdot W_1(s) \cdot x_1, \text{ отсюда } y_3 = W(s)x_1$$

$$\text{или } W(s) = W_3(s) \cdot W_2(s) \cdot W_1(s) \dots W_n(s)$$

Правило: ПФ последовательно соединенных звеньев равна

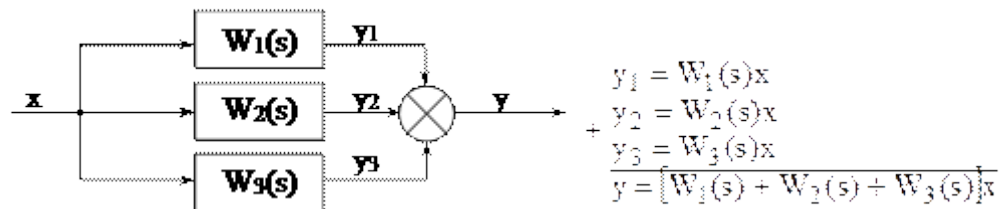
$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s)$$

произведению ПФ этих звеньев, т.е.

$$\text{Пример: } W_1(s) = \frac{K_1}{s}, \quad W_2(s) = \frac{K_0}{T_0s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K_1 K_0}{s(T_0s + 1)} = \frac{K}{s(T_0s + 1)}$$

2. Параллельное соединение



отсюда

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$

Вывод (правило): ПФ параллельно соединенных звеньев равна сумме ПФ этих звеньев.

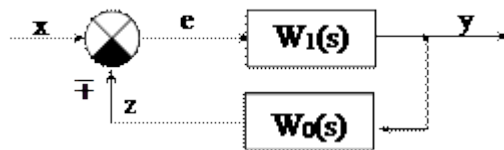
$$W_1(s) = \frac{K_1}{s}, \quad W_0 = \frac{K_0}{T_0 s + 1}$$

Пример:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_0}{T_0 s + 1} = \frac{K_1 T_0 s + K_1 + K_0 s}{s(T_0 s + 1)} = \\ &= \frac{(K_1 T_0 + K_0)s + K_1}{s(T_0 s + 1)} = K_1 \frac{\left(T_0 + \frac{K_0}{K_1}\right)s + 1}{s(T_0 s + 1)}. \end{aligned}$$

3. Встречно-параллельное соединение

Иногда это соединение называют схемой с о.с.



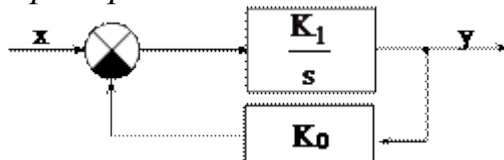
$$y = W_1(s)e = W_1 \cdot (x - z) = W_1 x - W_1 z = W_1 x \mp W_1 W_0 y,$$

отсюда $(1 \pm W_1 W_0)y = W_1 x$ или — обычно "+", т.к. отрицательная о.с.—
обычно "+", т.к. отрицательная о.с.



$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_0(s)}$$

Пример:



$$W(s) = \frac{\frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot K_0} = \frac{K_1}{s + K_0 K_1} = \frac{\frac{1}{K_0}}{\frac{1}{K_0 K_1} s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

т.е. соединение ведет себя как апериодическое звено.